Topologie de $GL_n(\mathbb{K})$

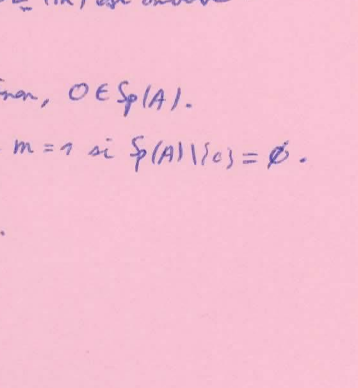
Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert : le déterminant est défini par $\det : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n} \end{array}$.
Elle est donc continue en fonction des coefficients de la matrice. En effet, elle est une somme et produit des applications coordonnées $p_{ij} : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto a_{ij} \end{array}$ qui sont des applications linéaires de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension finie vers $\mathbb{K}$. Elles sont donc continues.
Or, $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ où $\mathbb{K}^*$ est ouvert et $\det$ est continue, donc $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

$GL_n(\mathbb{K})$ est dense : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il n'y a rien à faire. Sinon, $0 \in Sp(A)$.
Alors $Sp(A) \setminus \{0\}$ est fini ou éventuellement vide. Posons $m = \min_{\lambda \in Sp(A) \setminus \{0\}} |\lambda|$ avec $m = 1$ si $Sp(A) \setminus \{0\} = \emptyset$.
Alors, $\forall k > \frac{1}{m}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{0\}$, $|\lambda| \geq m > \frac{1}{k}$. Donc $\frac{1}{k} \notin Sp(A)$.
Ainsi, $\forall k > \frac{1}{m}$, $A - \frac{1}{k} I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A - \frac{1}{k} I_n \xrightarrow[k \to \infty]{} A$.

Proposition : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Posons $P : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \det((1-t)A + tB) \end{array}$. Alors P est une fonction polynomiale en t et $P \neq 0$ car $P(0) = \det(A) \neq 0$. Ainsi le polynôme associé à P est non nul donc admet un nombre fini de racines.
Montrons que l'on peut tracer un chemin γ dans $\mathbb{C}$ qui évite $Z(P)$ les zéros de P et qui relie 0 à 1. $1 \notin Z(P)$ car $P(1) = \det(B) \neq 0$
Notons $\alpha_m \in Z(P)$ tel que $\forall z \in Z(P)$, $\mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Im}(\alpha_m) > 0$. Si $\mathrm{Im}(z) \leq 0$, $\forall z \in Z(P)$, prendre $\alpha_m = i$.
Considérons le chemin $\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} t + i t \,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$



Alors γ est continu et relie 0 à 1 sans croiser $Z(P)$.
En effet, $\forall t \in]0,1[$, $0 < \mathrm{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha_m) < \mathrm{Im}(\alpha_m)$ et donc $\gamma(t) \notin Z(P)$ par minimalité de $\mathrm{Im}(\alpha_m)$.
Ainsi, $\forall t \in [0,1]$, $P(\gamma(t)) \neq 0$ i.e. $(1-\gamma(t))A + \gamma(t)B \in GL_n(\mathbb{C})$
Posons $\alpha : \begin{array}{l} [0,1] \to GL_n(\mathbb{C}) \\ t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B \end{array}$. C'est une application continue par composition, reliant A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$.
$z \mapsto (1-z)A + zB$ est continue sur $\mathbb{C}$
D'où, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Proposition : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

L'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue. Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe, $\mathbb{R}^*$ le serait aussi.
Or, $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est réunion disjointe d'ouverts donc n'est pas connexe.
Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.